ANEXO A

1. FORMULACIÓN DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1.1. Distribución Normal

La función de densidad de probabilidad normal se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

(1)

Dónde:

x - variable aleatoria

μ - media de la población (esperanza matemática)

σ - desviación estándar de la población

El cálculo consiste en determinar el valor de la variable aleatoria (caudal máximo en m^3/s) con un determinado período de retorno, es decir, con una determinada probabilidad de excedencia. La fórmula general de cálculo es:

$$Q_{T_r} = Q_{medio} + \sigma \cdot k_1$$

(2)

Q_{T_r} - Caudal máximo (m3/s) con un período de retorno Tr, expresado en años.

Como se sabe:

$$p = \frac{1}{T_r} \cdot 100(\%)$$

Dónde:

p - Probabilidad de excedencia, expresada en porcentaje.

De acuerdo con lo anterior, se pueden establecer las siguientes equivalencias:

p (%)	20	10	5	2	1
Tr (años)	5	10	20	50	100

Q_{medio} - Es el promedio aritmético de la serie de caudales máximos (m3/s), por ende, es el equivalente a la media de la población (esperanza matemática) μ .

La serie está formada por los máximos anuales de los caudales, de tal manera que el número de datos de la serie es igual al número de años con registros. σ - es la desviación estándar de la serie (m3/s):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(Q_i - Q_{medio})^2}{n-1}}$$

(3)

Q_i - Es cada uno de los valores de la serie histórica de caudales máximos, en m^3/s

n - Es el número de datos de la serie y coincide con el número de años de la serie histórica k_1 - es el factor de frecuencia, propio de la distribución normal. Se trata de la misma variable estandarizada “z”, mencionada en el texto inicial de este parágrafo

La secuencia para la solución de la ecuación general es la siguiente:

Se define la función de distribución de probabilidad para un período de retorno conocido:

$$F\left(Q_{T_r}\right)=\frac{T_r-1}{T_r}$$

Se obtiene el factor de frecuencia k_1, en función del valor $\frac{T_r-1}{T_r}$ (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

Se calcula el valor medio de la serie de caudales máximos, Q_{medio}, (m^3/s)

Se determina la desviación estándar de los datos de la serie, σ, (m3/s).

Por último, se aplica la ecuación 2 para el período de retorno requerido. Este procedimiento se repite para determinar el caudal máximo asociado a cualquier otro período de retorno que se requiera.

En la **Tabla 1** se muestran los valores del factor de frecuencia k1.

Tabla 1 Valores del factor de frecuencia k1

FACTOR DE FRECUENCIA k1 EN FUNCIÓN DEL VALOR (Tr-1/Tr)										
k1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,758	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1.0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545

FACTOR DE FRECUENCIA k1 EN FUNCIÓN DEL VALOR (Tr-1/Tr)										
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2.0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Francisco S. Aparicio Mijares, 1989										
Nota: El presente cuadro se utiliza igualmente para determinar el factor de frecuencia k2										

1.2. Distribución Log Normal

En esta función los logaritmos naturales de la variable aleatoria se distribuyen normalmente.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{x\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right)^2}$$

(4)

Donde α y β son parámetros de la distribución y, por lo tanto, son la media y la desviación estándar de los logaritmos de la variable aleatoria. La función de distribución de probabilidad es:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln x_i}{n} \quad (5)$$

$$\beta = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(\ln x_i - \alpha)^2}{n} \right]^{1/2}$$

Al igual que en la distribución normal, se le asigna a "z" el valor: $z = \frac{\ln x - \alpha}{\beta}$

Procedimiento de Cálculo:

El cálculo consiste en determinar el valor de la variable aleatoria (caudal máximo) con un determinado período de retorno, es decir, con una determinada probabilidad de excedencia. La fórmula general de cálculo se representa con las expresiones 6 y 7:

$$Ln\, Q_{T_r} = Q_{medio} + \sigma \cdot k_1$$

(6)

$$Q_{T_r} = e^{L_{medio} + \sigma\, k_2}$$

(7)

$Q_{T\,r}$ - es la precipitación con un determinado período de retorno, Tr (m^3/s)

L_{medio} - es el valor medio de los logaritmos de la serie de caudales máximos (m^3/s)

σ - es la desviación estándar de los datos de la serie (m^3/s)

k_1 - es el factor de frecuencia, propio de la distribución log-normal (Es el mismo de la distribución Normal).

e - es la base de los logaritmos naturales

La secuencia para la solución de la ecuación general es la siguiente:

Se define la función de distribución de probabilidad: $F(Q_P) = \frac{T_r - 1}{T_r}$

Se obtiene el factor de frecuencia k_1, en función del valor $\frac{T_r - 1}{T_r}$ (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Este mismo cuadro se utiliza para determinar el factor de frecuencia k_1.

Se calcula el valor medio de los logaritmos de la serie de los caudales máximos, $L_{medio} = (\ln Q)_{medio}$ (m^3/s)

Se determina la desviación estándar de los logaritmos de los datos de la serie, σ, (m^3/s).

Por último, se aplican las ecuaciones 6 y 7 para el período de retorno requerido. Este procedimiento se repite para determinar el caudal máximo asociado a cualquier otro período de retorno que se requiera.

1.3. Distribución Pearson Tipo III

La función de densidad de probabilidad Pearson III se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \left\{ \frac{x - \delta_1}{\alpha_1} \right\}^{\beta_1 . -1} e^{-\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}}$$

Donde $\alpha 1$, $\beta 1$, $\delta 1$ son los parámetros de la función y $\Gamma(\beta 1)$ es la función de Gamma. Los parámetros $\alpha 1$, $\beta 1$, $\delta 1$ se evalúan a partir de n datos medidos mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$\bar{x}$ = $\alpha 1$ $\beta 1$ + $\delta 1$; S2 = $\alpha 1$ 2$\beta 1$; γ = 2 / ($\beta 1$)0.5

$\bar{x}$: es la media de los datos, S2 su varianza y γ su coeficiente de sesgo, que se define como:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^3 / n}{S^3}$$

La función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \int_0^x e^{-\left(\frac{x-\delta_1}{\delta_1}\right)} \left(\frac{x-\delta_1}{\delta_1}\right)^{\beta - 1} dx$$

(9)

y sustituyendo: $y = \dfrac{x - \delta_1}{\alpha_1}$;

La ecuación queda: $F(y) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta_1)} \displaystyle\int_0^y y^{\beta - 1} e^{-y} dy$.

Siendo la anterior una función ji cuadrada con $2\beta_1$ grados de libertad y $\chi^2 = 2y$

$$F(y) = F(\chi^2 | \nu) = F_{x^2}(2y | 2\beta_1)$$

Esta función se usa cuando $\beta 1$ = n /2, donde n es un entero positivo cualquiera. Como 2β no es entero, puede asumirse como el entero más próximo o, bien, interpolar utilizando los datos de la Tabla 2. Cuando los valores de δson inconsistentes (negativos o demasiado grandes), se estima un valor, por ejemplo, el valor de la ordenada al origen en una gráfica que relacione caudales máximos y período de retorno. En la **Tabla 2** se muestran los valores representativos de la función Gamma.

Tabla 2 Valores Representativos de la Función Gamma

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,76	0,92137
1,01	0,99433	1,26	0,90440	1,51	0,88659	1,77	0,92376
1,02	0,98884	1,27	0,90250	1,52	0,88704	1,78	0,92623
1,03	0,98355	1,28	0,90072	1,53	0,88757	1,79	0,92877
1,04	0,97844	1,29	0,89904	1,54	0,88818	1,80	0,93138
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,81	0,93408
1,06	0,96874	1,31	0,89600	1,56	0,88964	1,82	0,93685
1,07	0,96415	1,32	0,89464	1,57	0,89049	1,83	0,93969
1,08	0,95973	1,33	0,89338	1,58	0,89142	1,84	0,94261
1,09	0,95546	1,34	0,89222	1,59	0,89243	1,85	0,94561
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,86	0,94869
1,11	0,94740	1,36	0,89018	1,61	0,89468	1,87	0,95184
1,12	0,94359	1,37	0,88931	1,62	0,89592	1,88	0,95507
1,13	0,93993	1,38	0,88854	1,63	0,89724	1,89	0,95838
1,14	0,93642	1,39	0,88785	1,64	0,89864	1,90	0,96177
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,91	0,96523
1,16	0,92980	1,41	0,88676	1,66	0,90167	1,92	0,96877
1,17	0,92670	1,42	0,88636	1,67	0,90330	1,93	0,97240
1,18	0,92373	1,43	0,88604	1,68	0,90500	1,94	0,97610
1,19	0,92089	1,44	0,88581	1,69	0,90678	1,95	0,97988
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,96	0,98374
1,21	0,91558	1,46	0,88560	1,71	0,91057	1,97	0,98768

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,22	0,91311	1,47	0,88563	1,72	0,91258	1,98	0,99171
1,23	0,91075	1,48	0,88575	1,73	0,91467	1,99	0,99581
1,24	0,90852	1,49	0,88595	1,74	0,91683	2,00	1,00000
				1,75	0,91906		

Procedimiento de Cálculo:

El cálculo consiste en determinar el valor de la variable aleatoria (caudal máximo) con un determinado período de retorno. La fórmula general de cálculo es:

$$Q_{T_r} = Q_{medio} + \sigma \cdot k_3$$

(10)

Q_{T_r} - Caudal máximo (m^3/s) con un período de retorno Tr, expresado en años;

Q_{medio} - Es el promedio aritmético de la serie de caudales máximos (m3/s); σ - es la desviación estándar de la serie [m^3/s]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(Q_i - Q_{medio})^2}{n-1}}$$

(11)

Q_i - Es cada uno de los valores de la serie histórica de caudales máximos, en m3/s

n - Es el número de datos de la serie y coincide con el número de años de la serie histórica.

k_3 - es el factor de frecuencia, propio de la distribución Pearson tipo III.

La secuencia para la solución de la ecuación general es la siguiente:

Se calcula el valor medio de la serie de caudales máximos, Q_{medio}, (m^3/s)

Se determina la desviación estándar de los datos de la serie, σ (m^3/s).

Se obtiene el coeficiente de oblicuidad, C0

$$C_o = \frac{n\Sigma(X_i - X_{medio})^3}{(n-1)(n-2)\sigma^3}$$

(12)

Se define el factor de frecuencia k_3, en función del período de retorno Tr y del coeficiente de oblicuidad C0. (**Tabla 3** y **Tabla 4**.)

En la **Tabla 3** y **Tabla 4** presentan los valores de coeficientes de oblicuidad positivos y negativos respectivamente.

Tabla 3 Factor de frecuencia k3 para coeficientes de oblicuidad positivos

Coeficiente de oblicuidad C0	Período de retorno, años							
	1,0101	2	5	10	25	50	100	200
	Probabilidad de excedencia P(x>xi) o P(y>yi)							
	0,99	0,5	0,2	0,1	0,04	0,02	0,01	0,005
3,0	-0,667	-0,396	0,420	1,180	2,278	3,152	4,051	4,970
2,9	-0,690	-0,390	0,440	1,195	2,277	3,134	4,013	4,904
2,8	-0,714	-0,384	0,460	1,210	2,275	3,114	3,973	4,847
2,7	-0,740	-0,376	0,479	1,224	2,272	3,093	3,932	4,783
2,6	-0,769	-0,368	0,499	1,238	2,267	3,071	3,889	4,718
2,5	-0,799	-0,360	0,518	1,250	2,262	3,048	3,845	4,652
2,4	-0,832	-0,351	0,537	1,262	2,256	3,023	3,800	4,584

Coeficiente de oblicuidad C0	Período de retorno, años							
	1,0101	2	5	10	25	50	100	200
	Probabilidad de excedencia P(x>xi) o P(y>yi)							
	0,99	0,5	0,2	0,1	0,04	0,02	0,01	0,005
2,3	-0,867	-0,341	0,555	1,274	2,248	2,997	3,753	4,515
2,2	-0,905	-0,330	0,574	1,284	2,240	2,970	3,705	4,444
2,1	-0,946	-0,319	0,592	1,294	2,230	2,942	3,656	4,372
2,0	-0,990	-0,307	0,609	1,302	2,219	2,912	3,605	4,298
1,9	-1,037	-0,294	0,627	1,310	2,207	2,881	3,553	4,223
1,8	-1,087	-0,282	0,643	1,318	2,193	2,848	3,499	4,147
1,7	-1,140	-0,268	0,660	1,324	2,179	2,815	3,444	4,069
1,6	-1,197	-0,254	0,675	1,329	2,163	2,780	3,388	3,990
1,5	-1,256	-0,240	0,690	1,333	2,146	2,743	3,330	3,910
1,4	-1,318	-0,225	0,705	1,337	2,128	2,703	3,271	3,828
1,3	-1,383	-0,210	0,719	1,339	2,108	2,666	3,211	3,745
1,2	-1,449	-0,195	0,732	1,340	2,087	2,626	3,149	3,661
1,1	-1,518	-0,180	0,745	1,341	2,066	2,585	3,087	3,575
1,0	-1,588	-0,164	0,758	1,340	2,043	2,542	3,022	3,489
0,9	-1,660	-0,148	0,769	1,339	2,018	2,498	2,957	3,401
0,8	-1,733	-0,132	0,780	1,336	1,993	2,453	2,891	3,312
0,7	-1,806	-0,116	0,790	1,333	1,967	2,407	2,824	3,223
0,6	-1,880	-0,099	0,800	1,328	1,939	2,359	2,755	3,132
0,5	-1,955	-0,083	0,808	1,323	1,910	2,311	2,686	3,041
0,4	-2,029	-0,066	0,816	1,317	1,880	2,261	2,615	2,949
0,3	-2,104	-0,050	0,824	1,309	1,849	2,211	2,544	2,856
0,2	-2,178	-0,033	0,830	1,301	1,818	2,159	2,472	2,763
0,1	-2,252	-0,017	0,836	1,292	1,785	2,107	2,400	2,670
0,0	-2,326	0,000	0,842	1,282	1,751	2,054	2,326	2,576
					Monsalve S.G, 1999			

Tabla 4 Factor de frecuencia k3 para coeficientes de oblicuidad negativos

Coeficiente de	Período de retorno, años							
	1,0101	2	5	10	25	50	100	200
	Probabilidad de excedencia P(x>xi) o P(y>yi)							

oblicuidad C0	0,99	0,5	0,2	0,1	0,04	0,02	0,01	0,005
0,0	-2,326	0,000	0,842	1,282	1,751	2,054	2,326	2,576
-0,1	-2,400	0,017	0,846	1,270	1,716	2,000	2,252	2,248
-0,2	-2,472	0,033	0,850	1,258	1,680	1,945	2,178	2,388
-0,3	-2,544	0,050	0,853	1,245	1,643	1,890	2,104	2,294
-0,4	-2,615	0,066	0,855	1,231	1,606	1,834	2,029	2,201
-0,5	-2,686	0,083	0,856	1,216	1,567	1,777	1,955	2,108
-0,6	-2,755	0,099	0,857	1,200	1,528	1,720	1,880	2,016
-0,7	-2,824	0,116	0,857	1,183	1,488	1,663	1,806	1,926
-0,8	-2,891	0,132	0,856	1,166	1,448	1,606	1,733	1,837
-0,9	-2,957	0,148	0,854	1,147	1,407	1,549	1,660	1,749
-1,0	-3,022	0,164	0,852	1,128	1,366	1,492	1,588	1,664
-1,1	-3,087	0,180	0,848	1,107	1,324	1,435	1,518	1,581
-1,2	-3,149	0,195	0,844	1,086	1,282	1,379	1,449	1,501
-1,3	-3,211	0,210	0,838	1,064	1,240	1,324	1,383	1,424
-1,4	-3,271	0,225	0,832	1,041	1,198	1,270	1,318	1,351
-1,5	-3,330	0,240	0,825	1,018	1,157	1,217	1,256	1,282
-1,6	-3,388	0,254	0,817	0,994	1,116	1,166	1,197	1,216
-1,7	-3,444	0,268	0,808	0,970	1,075	1,116	1,140	1,155
-1,8	-3,499	0,282	0,799	0,945	1,035	1,069	1,087	1,097
-1,9	-3,553	0,294	0,788	0,920	0,996	1,023	1,037	1,044
-2,0	-3,605	0,307	0,777	0,895	0,959	0,980	0,990	0,995
-2,1	-3,656	0,319	0,765	0,869	0,923	0,939	0,946	0,949
-2,2	-3,705	0,330	0,752	0,844	0,888	0,900	0,905	0,907
-2,3	-3,753	0,341	0,739	0,819	0,855	0,864	0,867	0,869
-2,4	-3,800	0,351	0,725	0,795	0,823	0,830	0,832	0,833
-2,5	-3,845	0,360	0,711	0,771	0,793	0,798	0,799	0,800
-2,6	-3,889	0,368	0,696	0,747	0,764	0,768	0,769	0,769
-2,7	-3,932	0,376	0,681	0,724	0,738	0,740	0,740	0,741
-2,8	-3,973	0,384	0,666	0,702	0,712	0,714	0,714	0,714
-2,9	-4,013	0,390	0,651	0,681	0,683	0,689	0,690	0,690
-3,0	-4,051	0,396	0,636	0,660	0,666	0,666	0,667	0,667
					Monsalve S.G, 1999			

Por último, se aplica la ecuación 10 para el período de retorno requerido. Este procedimiento se repite para determinar caudal máximo asociado a cualquier otro período de retorno que se necesite.

1.4. Distribución Log Pearson Tipo III Tipo III

La función de densidad de probabilidad Log Pearson Tipo III se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \left\{ \frac{x-\delta_1}{\alpha_1} \right\}^{\beta_1 .-1} e^{-\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}}$$

(13)

$\alpha 1$, $\beta 1$, $\delta 1$ son los parámetros de la función y $\Gamma(\beta 1)$ es la función de Gamma. El significado de las variables es el mismo de la distribución Pearson tipo III, con la diferencia de que en este caso se opera con los logaritmos de los valores de la serie.

Procedimiento de cálculo
El cálculo consiste en determinar el valor de la variable aleatoria (caudal máximo) con un determinado período de retorno. La fórmula general de cálculo está representada por las expresiones 14 y 15:

$$\log Q_{T_r} = \left(\log Q_{medio}\right) + \sigma_{\log Q} \cdot k_4$$

(14)

$$Q_{T_r} = 10^{\left(\log Q_{medio}\right) + \sigma_{\log Q} k_4}$$

(15)

Q_{T_r} - Caudal máximo (m3/s) con un período de retorno Tr, expresado en años;

Q_{medio} - Es el promedio aritmético de la serie de caudales máximos (m3/s). La serie está formada por las máximos anuales de los caudales, de tal manera que el número de datos de la serie es igual al número de años con registros.

$$\sigma_{\log P} = \sqrt{\frac{\Sigma(\log Q_i - \log Q_{medio})^2}{n-1}}$$

(16)

k_4 - es el factor de frecuencia, propio de la distribución Log Pearson Tipo III tipo III.

La secuencia para la solución de la ecuación general es la siguiente:

Se calcula el valor medio de los logaritmos de la serie de caudales máximos:

$$\log Q_{medio} = \frac{\Sigma \log Q_i}{n}$$ (m3/s)

(17)

Se determina la desviación estándar de los logaritmos de los datos de la serie, (m3/s):

$$\sigma_{\log P} = \sqrt{\frac{\sum(\log Q_i - \overline{\log} Q)^2}{n-1}}$$

(18)

Se define el coeficiente de asimetría de los logaritmos de los datos de la serie:

$$A_g = \frac{n\Sigma(\log Q_i - \log Q_{medio})^3}{(n-1)(n-2)\log(\sigma)^3}$$

(19)

Se obtiene el factor de frecuencia K_4, en función del coeficiente de asimetría y del período de retorno utilizando la Tabla 5

En la **Tabla 5** se muestra el factor de frecuencia en función del periodo de retorno y del coeficiente de asimetría.

Tabla 5 Factor de frecuencia k4 en función del período de retorno y del coeficiente de asimetría

FACTOR DE FRECUENCIA k4 EN FUNCIÓN DEL PERÍODO DE RETORNO Y DEL COEFICIENTE DE ASIMETRÍA								
Coeficiente de Asimetría, Ag	Período de retorno, años							
	10,101	1,25	2	5	10	25	50	100
	Nivel de probabilidad, porcentaje							
	99	80	50	20	10	4	2	1
3,00	-0,667	-0,636	-0,396	0,420	1,180	2,278	3,152	4,051
2,80	-0,714	-0,666	-0,384	0,460	1,210	2,275	3,114	3,973
2,60	-0,769	-0,696	-0,368	0,499	1,238	2,267	3,071	3,889
2,40	-0,832	-0,725	-0,351	0,537	1,262	2,256	3,023	3,800
2,20	-0,905	-0,752	-0,330	0,574	1,284	2,240	2,970	3,705
2,00	-0,990	-0,777	-0,307	0,609	1,302	2,219	2,912	3,605
1,80	-1,087	-0,799	-0,282	0,643	1,318	2,193	2,848	3,499
1,60	-1,197	-0,817	-0,254	0,675	1,329	2,163	2,780	3,388
1,40	-1,318	-0,832	-0,225	0,705	1,337	2,128	2,706	3,271
1,20	-1,449	-0,844	-0,195	0,732	1,340	2,087	2,626	3,149
1,00	-1,588	-0,852	-0,164	0,758	1,340	2,043	2,542	3,022
0,80	-1,733	-0,856	-0,132	0,780	1,336	1,993	2,453	2,891
0,60	-1,880	-0,857	-0,099	0,800	1,328	1,939	2,359	2,755
0,40	-2,029	-0,855	-0,066	0,816	1,317	1,880	2,261	2,615
0,20	-2,178	-0,850	-0,033	0,830	1,301	1,818	2,159	2,472
0,00	-2,326	-0,842	0,000	0,842	1,282	1,751	2,054	2,326
-0,20	-2,472	-0,830	0,033	0,850	1,258	1,680	1,945	2,178
-0,40	-2,615	-0,816	0,066	0,855	1,231	1,606	1,834	2,029
-0,60	-2,755	-0,800	0,099	0,857	1,200	1,528	1,720	1,880
-0,80	-2,891	-0,780	0,132	0,856	1,166	1,448	1,606	1,733
-1,00	-3,022	-0,758	0,164	0,852	1,128	1,366	1,492	1,588
-1,20	-3,149	-0,732	0,195	0,844	1,086	1,282	1,379	1,449
-1,40	-3,271	-0,705	0,225	0,832	1,041	1,198	1,270	1,318
-1,60	-3,388	-0,675	0,254	0,817	0,994	1,116	1,166	1,197

FACTOR DE FRECUENCIA k4 EN FUNCIÓN DEL PERÍODO DE RETORNO Y DEL COEFICIENTE DE ASIMETRÍA								
Coeficiente de Asimetría, Ag	Período de retorno, años							
	10,101	1,25	2	5	10	25	50	100
	Nivel de probabilidad, porcentaje							
	99	80	50	20	10	4	2	1
-1,80	-3,499	-0,643	0,282	0,799	0,945	1,035	1,069	1,087
-2,00	-3,605	-0,609	0,307	0,777	0,895	0,959	0,980	0,990
-2,20	-3,705	-0,574	0,330	0,752	0,844	0,888	0,900	0,905
-2,40	-3,800	-0,537	0,351	0,725	0,795	0,823	0,830	0,832
-2,60	-3,889	-0,499	0,368	0,696	0,747	0,764	0,768	0,769
-2,80	-3,973	-0,460	0,384	0,666	0,702	0,712	0,714	0,714
-3,00	-4,051	-0,420	0,396	0,636	0,660	0,666	0,666	0,667
Linsley, Kohler, Paulus,1977								

Se aplica la fórmula 14 para obtener el valor: $\log Q_{T_r}$.

Finalmente, se calcula el antilogaritmo de la expresión: $\log Q_{T_r}$ para definir el caudal máximo con los períodos de retorno requeridos, con la ecuación 15.

1.5. Distribución Normal

Se ha encontrado que la distribución del valor máximo o mínimo escogido de muestras de tamaño “n” tiende a una distribución límite cuando el tamaño de la muestra aumenta. Si se dispone de N muestras con “n” eventos cada una y se selecciona el máximo “x” de los “n” eventos de cada muestra, se sabe que, a medida que aumenta “n”, la función de probabilidad de “x” tiende a:

$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}$ .La función de densidad de probabilidad es:

$f(x) = \alpha e^{\left[-\alpha(x-\beta)-e^{-\alpha(x-\beta)}\right]}$; α y β son los parámetros de la función. Para muestras muy grandes: $\alpha = \frac{1,2825}{S}$; $\beta = \bar{x} - 0,45S$ y para muestras relativamente pequeñas: $\alpha = \frac{\sigma_y}{S}$; $\beta = \bar{x} - \frac{\mu_y}{\alpha}$. La distribución límite también puede representarse de la siguiente manera: $Q = 1 - e^{-e^{-y}}$, donde "Q" es la probabilidad de excedencia de un caudal máximo; "e" es la base de los logaritmos naturales e "y" es la variable reducida, la cual es una función de la probabilidad de excedencia, es decir del período de retorno de la variable (caudal máximo). De esta manera, se dispone de la siguiente expresión:

$$Q_{T_r} = Q_{medio} + \left(\frac{y - y_n}{\sigma_n}\right) \cdot \sigma_x$$

(20)

Q_{medio} - Es el promedio aritmético de la serie de caudales máximos (m^3/s); σ_x - es la desviación estándar de la misma serie, en m3/s; σ_n ; y_n - son funciones del número de datos de la serie.

Procedimiento de cálculo

El cálculo consiste en determinar el valor de la variable aleatoria (caudal máximo) con un determinado período de retorno. Para esto se utiliza la ecuación 20 En esa expresión σ_x - Es la desviación estándar de la serie (m^3/s)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma(Q_i - Q_{medio})^2}{n-1}} \quad (21)$$

σ_n; y_n - son funciones del número de datos de la serie.

La ecuación 20 es equivalente a la ecuación 23 con “k” igual al término entre paréntesis, es decir:

$$k_5 = \left(\frac{y - y_n}{\sigma_n} \right)$$

(22)

En la Tabla 6 se presentan los valores de k5 para diferentes períodos de recurrencia y varias longitudes del registro (datos de la serie).

Así, la ecuación de cálculo es:

$$Q_{T_r} = Q_{medio} + \sigma \cdot k_5$$

(23)

La secuencia para la solución de la ecuación general es la siguiente:

Se calcula el valor medio de la serie de caudales máximos, (m^3/s)

Se determina la desviación estándar de los datos de la serie, (m^3/s).

Se obtiene el factor de frecuencia k_5, en función del período de retorno, T_r y de la longitud de registro (Tabla 6).

En la **Tabla 6** se presentan los valores del Factor de frecuencia k5 para diferentes períodos de retorno y longitudes del registro.

Tabla 6 Factor de frecuencia k5 para diferentes períodos de retorno y longitudes del registro

Período de	Probabilidad	Longitud de registro, años

retorno, años	de excedencia	20	30	40	50	100	200	∞
1,58	0,63	-0,492	-0,482	-0,476	-0,473	-0,464	-0,459	-0,45
2	0,5	-0,147	-0,152	-0,155	-0,156	-0,16	-0,162	-0,164
2,33	0,43	0,052	0,038	0,031	0,026	0,016	0,01	0,001
5	0,2	0,919	0,866	0,838	0,82	0,779	0,755	0,719
10	0,1	1,62	1,54	1,5	1,47	1,4	1,36	1,3
20	0,05	2,3	2,19	2,13	2,09	2	1,94	1,87
50	0,02	3,18	3,03	2,94	2,89	2,77	2,7	2,59
100	0,01	3,84	3,65	3,55	3,49	3,35	3,27	3,14
200	0,005	4,49	4,28	4,16	4,08	3,93	3,83	3,68
400	0,0025	5,15	4,91	4,78	4,56	4,51	4,4	4,23
Linsley, Cohler, Paulus, 1997								

Se aplica la ecuación 23 y se calcula finalmente el valor requerido Q_{Tr}. Frecuentemente se calculan las cinco distribuciones anteriores para una misma serie y se selecciona la que presente mejor comportamiento estadístico utilizando pruebas de bondad del ajuste, de acuerdo con el método de Chi Cuadrado y Smirnov Kolmogorov.

1.6. Pruebas de bondad y ajuste de los datos de una distribución

Desde el punto de vista estadístico, se sabe que una variable aleatoria que represente eventos extremos, tales como los caudales máximos, exhibe una distribución muy similar a la normal, log-normal, Pearson, Log Pearson Tipo III tipo III o Gumbel, pero de antemano, no se conoce cuál de ellas la representa mejor. Por ese motivo, es necesario aplicar algunas pruebas para seleccionar la más adecuada.

1.6.1. Prueba Chi Cuadrado (X^2)

A continuación se expone el procedimiento de aplicación de la prueba:

Los datos de la serie disponible se dividen en un número k de intervalos de clase. El número mínimo de intervalos k se puede determinar con la siguiente ecuación, cuyo resultado se redondea al número entero superior:

$$k = 1 + 3{,}33 \cdot \log \cdot n$$

(24)

n – es el número de datos de la serie.

De acuerdo con lo anterior, El valor de cada intervalo es:

$$I = \frac{Q_{máx} - Q_{\min}}{k}$$

(25)

Q_{man} – Valor máximo de la serie de caudales, m^3/s.

$Q \min$ – valor mínimo de la serie de caudales, m^3/s.

Se calcula el número esperado de eventos en el mismo intervalo, E_i.

$$E_i = n[F(S_i) - F(I_i)]; \quad i = 1,2,....,k$$

(26)

F (Si) - Es la función de distribución de probabilidad en el límite superior del intervalo i

$F(I_i)$ - Es la misma función en el límite inferior

n - Es el número de eventos.

Utilizando los datos ordenados en intervalos de clase se calcula el valor C para todas las funciones de distribución analizadas por medio de la expresión:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(N_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

(27)

N_i- Es el número observado de eventos en el intervalo i.

Se define el valor de una variable aleatoria con distribución Chi Cuadrado $\left(\chi^2\right)$ para $q = \left(k - 1 - m\right)$ grados de libertad y un nivel de significancia S, donde m es el número de parámetros estimados a partir de los datos.

El valor de $\chi^2_{(1-S),(k-1-m)}$ se obtiene de la **Tabla 7** que contiene la función de distribución χ^2 (Chi Cuadrado). El valor usual de S es de 0.05.

Tabla 7 Valores de X2(1 – S) (k – 1 – m) pertenecientes a la función de distribución Chi Cuadrado

q	χ20,995	χ20,99	χ20,975	χ20,95	χ20,90	χ20,75	χ20,50	χ20,25	χ20,10	χ20,05	χ20,025	χ20,01	χ20,005
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,32	0,455	0,102	0,0158	0,0039	0,001	0,0002	0
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103	0,0506	0,0201	0,01
3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	1,15	0,831	0,554	0,412
6	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	7,84	5,35	3,45	2,2	1,64	1,24	0,872	0,676
7	20,3	18,5	16	14,1	12	9,04	6,35	4,25	2,83	2,17	1,69	1,24	0,989
8	22	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,34	5,07	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	23,6	21,7	19	16,9	14,7	11,4	8,34	5,9	4,17	3,33	2,7	2,09	1,73
10	25,2	23,2	20,5	18,3	16	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,3	7,58	5,58	4,57	3,82	3,05	2,6
12	28,3	26,2	23,3	21	18,5	14,8	11,3	8,44	6,3	5,23	4,4	3,57	3,07
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16	12,3	9,3	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	17,1	13,3	10,2	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	32,8	30,6	27,5	25	22,3	18,2	14,3	11	8,55	7,26	6,26	5,23	4,6
16	34,3	32	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12,8	10,1	8,67	7,56	6,41	5,7
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26	21,6	17,3	13,7	10,9	9,39	8,23	7,01	6,26
19	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	14,6	11,7	10,1	8,91	7,63	6,84

q	χ20,995	χ20,99	χ20,975	χ20,95	χ20,90	χ20,75	χ20,50	χ20,25	χ20,10	χ20,05	χ20,025	χ20,01	χ20,005
20	40	37,6	34,2	31,4	28,4	23,8	19,3	15,5	12,4	10,9	9,59	8,26	7,43
21	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	24,9	20,3	16,3	13,2	11,6	10,3	8,9	8,03
22	42,8	40,3	36,8	33,9	30,8	26	21,3	17,2	14	12,3	11	9,54	8,64
23	44,2	41,6	38,1	35,2	32	27,1	22,3	18,1	14,8	13,1	11,7	10,2	9,26
24	45,6	43	39,4	36,4	33,2	28,2	23,3	19	15,7	13,8	12,4	10,9	9,89
25	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	29,3	24,3	19,9	16,5	14,6	13,1	11,5	10,5
26	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	30,4	25,3	20,8	17,3	15,4	13,8	12,2	11,2
27	49,6	47	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	21,7	18,1	16,2	14,6	12,9	11,8
28	51	48,3	44,5	41,3	37,9	32,6	27,3	22,7	18,9	16,9	15,3	13,6	12,5
29	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	33,7	28,3	23,6	19,8	17,7	16	14,3	13,1
30	53,7	50,9	47	43,8	40,3	34,8	29,3	24,5	20,6	18,5	16,8	15	13,8
40	66,8	63,7	59,3	55,8	51,8	45,6	39,3	33,7	29,1	26,5	24,4	22,2	20,7
50	79,5	76,2	71,4	67,5	63,2	56,3	49,3	42,9	37,7	34,8	32,4	29,7	28
60	92	88,4	83,3	79,1	74,4	67	59,3	52,3	46,5	43,2	40,5	37,5	35,5
70	104,2	100,4	95	90,5	85,5	77,6	69,3	61,7	55,3	51,7	48,8	45,4	43,3
80	116,3	112,3	106,6	101,9	96,6	88,1	79,3	71,1	64,3	60,4	57,2	53,5	51,2
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98,6	89,3	80,6	73,3	69,1	65,6	61,8	59,2
100	140,2	135,8	129,6	124,3	118,5	109,1	99,3	90,1	82,4	77,9	74,2	70,1	67,3
Francisco S. Aparicio Mijares, 1989													

Se verifica el cumplimiento de la siguiente desigualdad. De lo contrario, la función de distribución no se acepta.

$$C \leq \chi^2_{(1-S)(k-1-m)} \quad (28)$$

1.6.2. Prueba de Smirnov Kolmogorov

Con esta metodología la bondad del ajuste se determina de la siguiente manera: Inicialmente se define el valor de la función de distribución de probabilidad observada, con la siguiente ecuación:

$$F(x_m) = 1 - \frac{m}{n+1}$$

m: es el número de orden de cada uno de los datos de la serie disponible, ordenados de mayor a menor. n - es el total de datos de la misma serie.

Se calcula el parámetro S, que representa el valor absoluto de la diferencia entre la función de distribución de probabilidad observada F (Xm) y la estimada P (Xm).

$$S = \text{máx}\left| F(Xm)-P(Xm) \right|$$

Se determina el valor crítico, C, del anterior parámetro, el cual se toma de la en función del número de datos de la serie disponible (tamaño de la serie) y del nivel de significancia que se seleccione. Si: $S < C$, el ajuste es correcto y se acepta la función de distribución que se está probando. En la **Tabla 8** se presentan los valores críticos de valor C para la prueba de Smirnov Kolmogorov.

Tabla 8 Valor Crítico C –Prueba Smirnov Kolmogorov

Tamaño de la muestra	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	0.51	0.56	0.67
10	0.37	0.41	0.49
15	0.3	0.34	0.4
20	0.26	0.29	0.35
25	0.24	0.26	0.32
30	0.22	0.24	0.29
40	0.19	0.21	0.25
n Grande	$\sqrt{n} = 1.22$	$\sqrt{n} = 1.36$	$\sqrt{n} = 1.63$